УДК 681.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНО-ПЕРЕСТРАИВАЕМЫХ СИСТЕМ

С.В. Шидловский

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
E-mail: stas@iit.tusur.ru

Рассматривается моделирование управления нестационарными температурными полями объектов со сложной геометрической конфигурацией. Приводятся сравнительные динамические характеристики замкнутых систем автоматического регулирования с перестраиваемой и фиксированной структурами.

Введение

Технические системы управления обычно являются довольно сложными устройствами, динамика которых описывается различными функциональными уравнениями. В каждом конкретном случае при использовании тех или иных математических методов необходимо составить математическую модель объекта. На практике подавляющее большинство объектов – это объекты с распределенными параметрами. Управляемый процесс с распределенными параметрами описывается краевыми задачами для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с частными производными или бесконечными системами обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Если рассматривать пространственно-многомерные объекты со сложной формой границы области изменения пространственных координат, а также учитывать принципиально нелинейные эффекты, получить аналитическое решение уравнения объекта затруднительно. Данный аспект привел к широкому распространению на практике приближенных моделей объектов с распределенными параметрами упрощенного вида, описывающих их поведение с требуемой точностью. В инженерной практике получили широкое распространение разностные методы приближенного описания объектов с распределенными параметрами, использующие различные способы пространственного, временного или пространственно-временного квантования в области изменения аргументов входа и выхода рассматриваемого распределенного блока [2, 3].

Для построения моделей будем использовать метод конечных элементов, позволяющий произвести дискретизацию области изменения пространственных переменных путем разбиения с некоторой погрешностью на ряд неперекрывающихся подобластей простой формы, в пределах каждого из которых функция состояния объекта приближенно описывается однотипным образом линейной комбинацией конечного числа заранее выбранных базисных функций.

Поддержание необходимого физического параметра на заданном уровне в подобных объектах является важной и трудоемкой задачей. Одним из возможных способов обеспечения данного режима является вычислительная среда с перестраиваемой структурой, формирующая управляющее воздействие, построенная по автоматному принципу и имеющая в узловых точках многофункциональные логические модули (МЛМ), т. е. автоматы с перестраиваемой структурой [4].

Общее выражение для двувходового автомата можно представить в виде

$$V = (A \times A', Q, B, \varphi, \psi).$$

Функционирование такого автомата обуславливается некоторым сверхсловом $\tilde{\alpha}'$, $\tilde{\alpha}' \in (A')^{\infty}$, и предполагается, что на первый вход автомата V (алфавит A) в каждый момент времени поступает произвольный входной сигнал, а на второй вход – только очередной символ сверхслова $\tilde{\alpha}'$. Следовательно, сверхслово $\tilde{\alpha}'$ управляет изменением структуры автомата V. Под функционированием автомата с перестраиваемой структурой V понимается тернарное

отношение $\{(\tilde{\alpha}',\overline{\varphi}(q,\tilde{\alpha}\times\tilde{\alpha}'),\overline{\psi}(q,\tilde{\alpha}\times\tilde{\alpha}'))|q\in Q,\tilde{\alpha}\in A^*\}$, где $\tilde{\alpha}\times\tilde{\alpha}'$ – слово вида $(a(1),a'(1))...(a(s),a'(s))$, $\tilde{\alpha}=a(1)...a(s)$, $\tilde{\alpha}'=a'(1)a'(2)...$

Поэтому разумное сочетание инженерной интуиции и математической строгости в анализе явления составляет основу обоснованного выбора математической модели.

Постановка задачи

Исследуемый объект (рис. 1) состоит из трех частей, каждая из которых занимает некоторую область D_i (i=1,2,3 – номер части) трехмерного пространства, а G_i – поверхность, ограничивающая соответствующую область D_i.

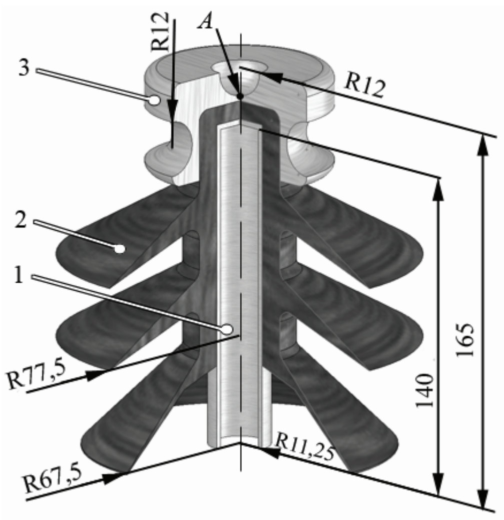


Рис. 1. *Исследуемый объект*

Функция $h_i(x, y, z, t)$ описывает распределение температуры в соответствующей i-й части и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = a_i\left(\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2}\right),\quad a_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_{p_i}}, \qquad (1)$$

где a_i – коэффициент температуропроводности; x, y, z – пространственные декартовые координаты; ρ_i – плотность; c_{p_i} – теплоемкость; λ_i – коэффициент теплопроводности.

Для уравнения (1) начальное условие

$$h_i(x,y,z,0)=0, \qquad (2)$$

граничные условия

$$-\lambda_j \left.\frac{\partial h_j}{\partial n}\right|_{Q_j^1} = \eta_j(h_{j-1}|_{Q_{j-1}^2} - h_j|_{Q_j^1}),\quad j=3,2; \qquad (3)$$

$$-\lambda_i \left.\frac{\partial h_i}{\partial n}\right|_{L_i} = 0,\quad i=1,2,3; \qquad (4)$$

$$h_1|_{Q_1^1} = u(t). \qquad (5)$$

Здесь $\partial h_j/\partial n|_{Q_j^1}$ означает производную по нормали n к поверхности Q_j^1, взятую в точке, лежащей на поверхности Q_j^1 (рис. 2); i – номер части объекта; η_j – коэффициент теплоотдачи; $u(t)$ – управляющее воздействие с ограничением: $0\le u(t)\le 40$; L_i – поверхность, получаемая из выражения

$$L_i = (G_i \setminus Q_i^1)\setminus Q_i^2,$$

где $Q_i^2=(G_i \cap G_{i+1})$.

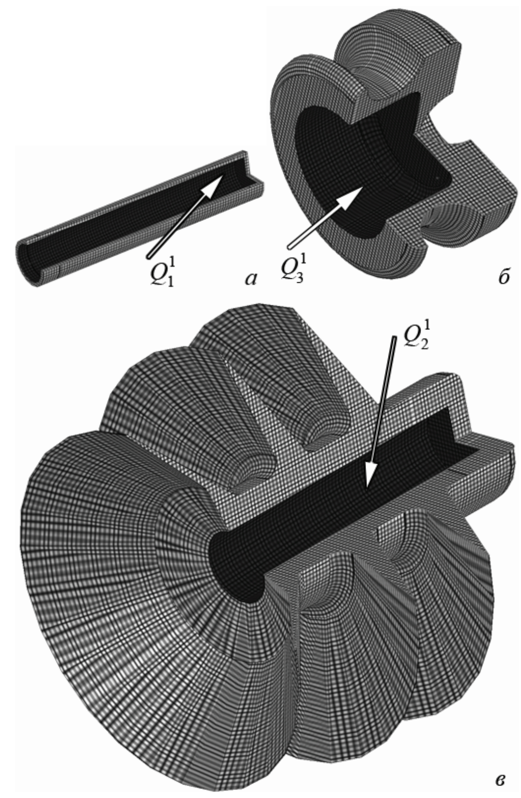


Рис. 2. *Общий вид составных частей объекта: а) первая; б) третья; в) вторая*

Требуется, чтобы

$$|h^* - h(x',y',z',\infty)| \le \varepsilon_{\text{ст}}^{\text{доп}}, \qquad (6)$$

где h^* – требуемое значение температуры; x', y', z' – заданные координаты точки A в трехмерном пространстве (рис. 1); $\varepsilon_{\text{ст}}^{\text{доп}}$ – допустимое значение статической ошибки регулирования.

Классический алгоритм управления

Существует большое число способов [5] нахождения решения уравнения теплопроводности. В нашем случае мы имеем дело с уравнением, описывающим поведение геометрически сложного объекта в трехмерной декартовой системе координат. Так как для данного рода систем регулирующим органом является параметр объекта, в данном случае изменяющаяся температура на границах, то теоретическое исследование работы такого рода систем автоматического регулирования, особенно при наличии распределенных параметров, наталкивается на большие математические трудности, связанные с исследованием нелинейных уравнений. Пожалуй, одним из эффективных способов достижения поставленной цели в сложившейся ситуации является привлечение численных методов и проведение имитационного моделирования.

Анализ и синтез современных систем автоматического управления в настоящее время немыслимы без применения средств вычислительной техники. Существует большое количество пакетов прикладных программ (ППП), в которых реализованы популярные и эффективные численные методы. Эти ППП способны облегчить решение задач синтеза и анализа подобных систем. К наиболее известным зарубежным ППП можно отнести Matlab, Mathcad, Comsol Multiphysics (FemLab), Maple, Fluent.

Наиболее интересным, по нашему мнению, является пакет Comsol Multiphysics, в основу которого заложен метод конечных элементов. Используя возможности ППП, произведем дискретизацию исходной геометрической модели (рис. 1), разбивая ее на ряд конечных элементов.

Сформируем управляющее воздействие $u(t)$ по пропорциональному закону с ограничением:

$$u(t) = \begin{cases} k_{\max} & \text{при} \quad k\,\varepsilon(t) \ge k_{\max}, \\ k\,\varepsilon(t) & \text{при} \quad k_{\min} < k\,\varepsilon(t) < k_{\max}, \\ k_{\min} & \text{при} \quad k\,\varepsilon(t) \le k_{\min}, \end{cases}$$

где $k_{\max}$, $k_{\min}$ – максимально и минимально возможное значение на выходе управляющего устройства соответственно; k – коэффициент передачи управляющего устройства; $\varepsilon(t)$ – ошибка регулирования.

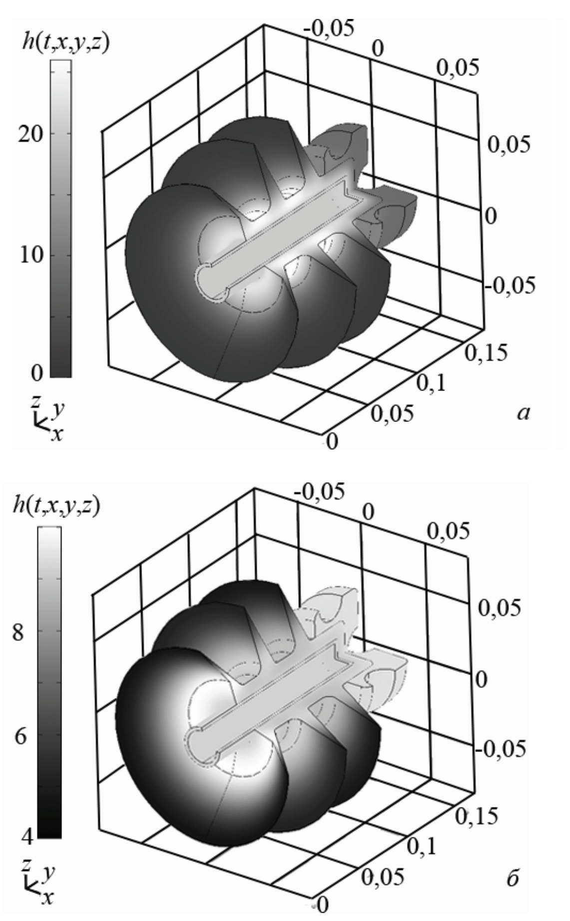


Рис. 3. *Температурное поле на момент времени: а) 300 и б) 655 с*

Зададим k=16; $k_{\max}$=40; $k_{\min}$=0; a_1=a_3= 7,69·10^{-6}; a_2=8,9·10^{-7}; h^*=10; $\varepsilon_{\text{ст}}^{\text{доп}}$=0,5; λ_1=λ_3=27; λ_2=1,3. Здесь и далее, когда единицы измерения не указаны, то числа представляют соответствующие физические величины в любой согласованной системе единиц.

В результате проведения имитационного моделирования получено распределение температурного поля по поверхности исследуемого тела (рис. 3).

Динамика изменения температуры в контрольной точке (x', y', z') трехмерного пространства представлена на рис. 4, *а*, а управляющее воздействие, при котором получена эта динамика, – на рис. 4, *б*.

Из рис. 4, *а* видно, что в системе присутствует статическая ошибка $\varepsilon_{\text{ст}}$=0,5, возникающая в результате использования пропорционального закона регулирования в статической системе и удовлетворяющая заданному требованию (6). Чтобы свести ее к нулю, достаточно в контур управления добавить интегрирующее звено, тем самым наделив всю систему свойством астатизма.

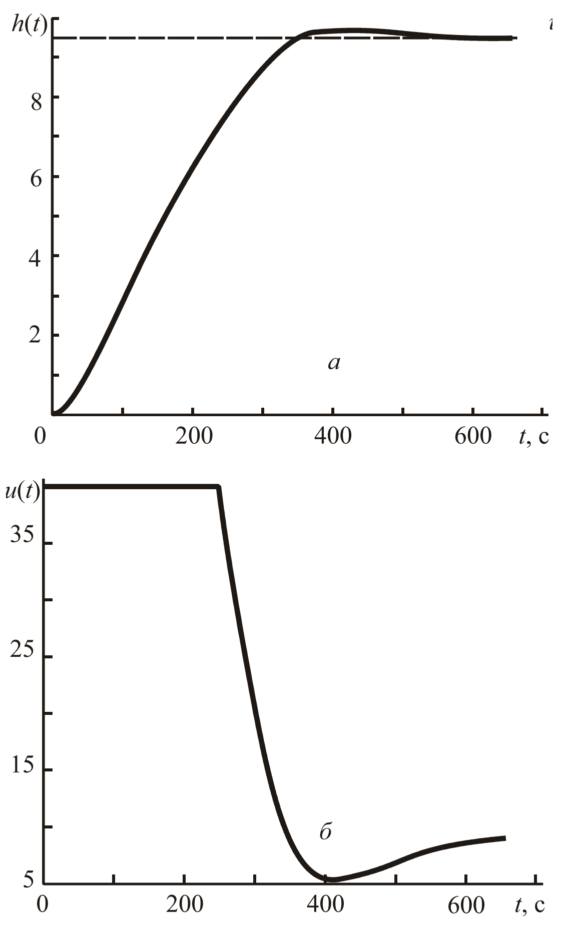


Рис. 4. *Динамические характеристики: а) переходный процесс в контрольной точке; б) управляющее воздействие*

Итак, в системах с распределенными параметрами допустимо применять законы управления, функционирующие в системах с сосредоточенными параметрами, в случае, если предъявляемые требования к системе ограничиваются поддержанием

технологического параметра в одной единственной точке и никаких других ограничений на соседние точки технологического объекта не наложено.

Структурно-перестраиваемый алгоритм управления

Рассмотрим случай, когда динамика распространения тепла в исследуемом объекте описывается выражениями (1)–(4) с дополнительным граничным условием

$$-\lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial n}\bigg|_{Q_1^1} = \eta_1(\mu(t) - h_1|_{Q_1^1}),$$

где $\mu(t)$ – выходной сигнал исполнительного механизма, описываемый уравнением

$$T_{\text{и.м}}\, \mu'(t) = u(t).$$

Здесь $T_{\text{и.м}}$ – постоянная времени исполнительного механизма; $u(t)$ – управляющее воздействие.

Обеспечим в системе переходный процесс с заданным качеством (время регулирования 60 с, перерегулирование 20 %) в точке с координатами x', y', z'. Для этого сформируем управляющее воздействие, используя в управляющем устройстве, базирующемся на МЛМ, принцип перестраиваемости структур [6, 7]:

$$u(t) = \Psi\, \varepsilon(t),$$

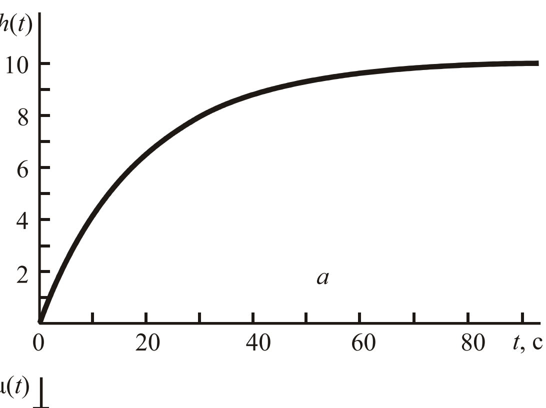
$$\Psi = \begin{cases} \alpha \text{ при } \varepsilon(t)s > 0, \\ \beta \text{ при } \varepsilon(t)s \le 0, \end{cases}$$

где α и β – коэффициенты передачи первой и второй линейных структур, используемых в управляющем устройстве соответственно; $s=\text{sgn}(\varepsilon'(t)+c\varepsilon(t))$ – информация о знаке линейной комбинации ошибки и ее производной, характеризующая положение системы в фазовом пространстве относительно прямой переключения; c – коэффициент наклона прямой. Как видно, для функционирования системы не требуется точного значения производной от сигнала ошибки, а достаточно лишь информации о знаке ее линейной комбинации с величиной ошибки, которую можно получить сравнительно простыми техническими средствами, например, описанными в [8].

Зададим значение коэффициента α максимальным, которое может обеспечить управляющее устройство, а коэффициент β достаточно выбрать так, чтобы система в момент переключения на вторую линейную структуру была охвачена положительной обратной связью и ее фазовая траектория обращена в противоположное направление движения траектории первой линейной структуры (при коэффициенте α). Итак, α=50; β=–10; c=0,1; $T_{\text{и.м}}$=5.

Из результатов моделирования, рис. 5, следует, что полученный переходный процесс удовлетворяет заданным оценкам качества: время регулирования составляет 58 с и перерегулирование – 0 %.

При рассмотрении первой системы автоматического регулирования с классическим алгоритмом управлением (на технических средствах Intel Pentium M 1,7 ГГц, ОЗУ 2 Гб) моделирование динамических характеристик длительностью 900 с заняло 10 мин, а для системы со структурно-перестраиваемым алгоритмом управления 90 с – 3,5 ч. Связано это с тем, что в структурно-перестраиваемой системе в граничные условия, описывающие динамические характеристики исследуемого объекта, входит разрывная функция, т. е. динамика процесса становится принципиально нелинейной. Следовательно, при имитационном моделировании подобных систем накладываются более жесткие требования на аппаратные средства, с помощью которых проводится вычислительный эксперимент.



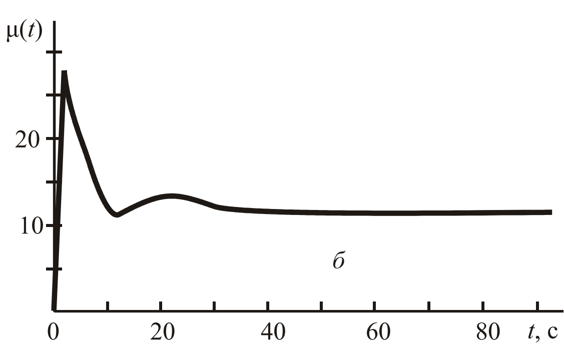


Рис. 5. *Динамические характеристики в системе с перестраиваемой структурой: а) переходный процесс; б) регулирующее воздействие на объект*

Заключение

Приведены результаты математического моделирования нестационарных тепловых полей регулируемых объектов сложной геометрии, когда в граничные условия входит функция регулирования.

На основе полученной математической модели проведены вычислительные эксперименты по исследованию динамики систем автоматического регулирования с двумя типами алгоритмов управления: классическим (пропорциональным) и структурно-перестраиваемым. В результате исследований выявлено, что моделирование последних занимает значительно больше времени вычислений, чем в классических системах. Однако проигрыш во времени моделирования при анализе системы компенсируется значительным выигрышем в динамических характеристиках функционирующей системы (быстродействие в 10 раз выше и отсутствует перерегулирование).

Применение декартовой системы координат в построенной модели позволяет производить исследования объектов как с осью симметрии, так и без нее. Особое внимание при рассмотрении подобных задач следует уделять построению геометрии исследуемого объекта, от которой зависит как скорость вычисления, так и вообще их возможность. Следует избегать избыточности мелких деталей, оказывающих малое влияние на динамику изучаемого процесса.

Таким образом, на основе проведенных исследований можно сделать вывод об эффективности структурно-перестраиваемых алгоритмов управления, позволяющих осуществлять высококачественное управление при неполной информации об объекте управления и наделяющих всю систему новыми свойствами, не присущими ни одной из фиксированных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
2. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. Шидловский С.В. Логическое управление в автоматических системах с перестраиваемой структурой // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 2. – С. 123–127.
5. Агошков В.И., Дубровский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
6. Шидловский С.В. Автоматическое управление. Перестраиваемые структуры. – Томск: Томский госуниверситет, 2006. – 288 с.
7. Шидловский С.В. Логическая система с перестраиваемой структурой в задачах управления технологическими процессами // Автометрия. – 2005. – № 4. – С. 104–113.
8. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 336 с.

УДК 519.7:007.52:519.81